ISSN: 2007-5316
año 10/ núm. 30
Entretextos
diciembre 2018 - marzo 2019

EL CÁLCULO: DE LA GEOMETRÍA GRIEGA A LA ACTUALIDAD

CALCULUS: FROM THE GREEK GEOMETRY TO THE PRESENT DAY

Dr. Jesús Pablo Lauterio Cruz*

Resumen

Este trabajo tiene la finalidad de presentar una breve síntesis del origen del cálculo infinitesimal desde un punto de vista epistemológico. El cálculo, más allá de un conjunto de frías reglas matemáticas, es un compendio de ideas y filosofías que han evolucionado y se han ido perfeccionando a lo largo de los siglos. Realizar un breve recorrido desde la necesidad de la humanidad por las matemáticas hasta el cálculo actual, pasando a través de la geometría griega y el método analítico del Renacimiento, nos permite situar esta disciplina en un contexto más humano y menos abstracto. En el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, se opta generalmente por el camino operacional. Y aunque no hay duda de que sea lo correcto, es necesario también tener claro que esta poderosa herramienta, fruto del pensamiento humano, no se construyó de un día para otro. El cálculo es el producto de un largo caminar y de la vida misma de muchas personas que aún siguen influyendo en nuestros días.

* Investigador posdoctoral en el Laboratorio de Sistemas Bioinspirados, DICIS-Universidad de Guanajuato. Investigador Nacional (SNI), Nivel I. Doctor en Ciencias en Óptica por el Centro de Investigaciones en Óptica (CIO). jplauterio@hotmail.com

Abstract

This work has the purpose of presenting a brief synthesis of the origin of the infinitesimal calculus from an epistemological point of view. The calculus, beyond a set of cold mathematical rules, is a compendium of ideas and philosophies that have evolved and been perfected over the centuries. To make a brief journey from the need of humanity for mathematics to the current calculus, passing through the Greek geometry and the analytical method of the Renaissance, allows us to place this discipline in a more human

and less abstract context. In the teaching-learning process of mathematics, we usually choose the operational way. And although there is no doubt that it is the right thing to do, it is also necessary to be clear that this powerful tool, product of the human thinking, was not built from one day to the next. Calculus is the product of a long walk and the life itself of many people who are still influencing our days.

Palabras clave: cálculo, enseñanza de las matemáticas, epistemología, matemáticas.

Keywords: calculus, mathematics education, epistemology, mathematics.

Los griegos y la geometría

Las primeras referencias de una matemática organizada y avanzada datan del tercer milenio a. C., en Mesopotamia y Egipto (Boyer, 1959), y estaban regidas principalmente por la aritmética. No así las matemáticas de los griegos, muchos años más tarde.

Los geómetras griegos eran considerados sabios en la Grecia antigua. Personas respetadas no solo por sus conocimientos matemáticos, sino porque tenían la tarea de resolver problemas sociales: calcular las áreas de los terrenos, medir las distancias entre los pueblos, mejorar la balística, entre otros. Para los griegos, la geometría era la ciencia de los sabios, la matemática de los eruditos; la aritmética, por otra parte y pese a su valor, era la ciencia de la gente sencilla.

El porqué los griegos se centraron en la geometría tiene su origen en el siglo VI a. C., cuando Grecia experimentó un trascendental avance en las matemáticas debido a los viajes realizados por Tales de Mileto a Egipto y Mesopotamia (Burton, 2011). Tales quedó cautivado tras ver cómo egipcios y babilonios resolvían problemas de índole geométrica, aunque de forma meramente empírica, pues no utilizaban un sistema lógico-deductivo. A su regreso, Tales incorporó a la geometría un método deductivo a través de procesos sistemáticos de abstracción: lo que sentó las bases para los trabajos de Pitágoras y sus sucesores (Mercado, 1972).

En la Grecia antigua, los geómetras griegos eran considerados sabios por resolver problemas sociales: medir la distancia entre los pueblos, mejorar la balística, entre otros.

Hacia el 530 a. C., Pitágoras de Samos y sus discípulos hicieron importantes descubrimientos no solo en geometría sino también en la teoría de los números. Tanto así que cultivaron el concepto del número y les era el principio crucial de toda proporción, orden y armonía. En el marco de la geometría, el descubrimiento más representativo de la escuela pitagórica es el teorema de la hipotenusa, mejor conocido como el "teorema de Pitágoras" (figura 1), cuya demostración matemática fue hecha por los pitagóricos, muy probablemente mediante semejanza de triángulos. (La demostración de Euclides puede consultarse en el capítulo 9 de Eves, 1994).

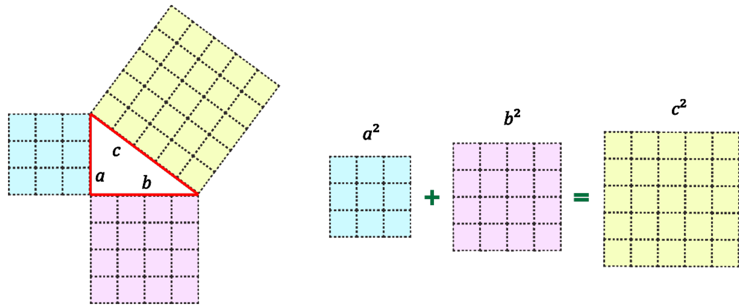

Figura 1. Representación geométrica del teorema de Pitágoras. Aunque a la fecha hay quienes discuten la atribución de este teorema a Pitágoras o sus seguidores, no hay pruebas de que civilizaciones antiguas como la egipcia, que empleaban comúnmente ternas pitagóricas como la 3-4-5 (Mercado, 1972), lo hicieran de forma sistemática.

Cabe mencionar que los pitagóricos no solo se ocupaban de resolver problemas exclusivamente matemáticos, sino también problemas filosóficos; fue aquí donde surgieron los mayores inconvenientes. A finales del siglo V a. C., Zenón de Elea y sus paradojas filosóficas basadas primordialmente en el *infinito* formaban parte del bagaje de los matemáticos y pensadores contemporáneos (Villalba, 2002). Esto implicó que muchos de los resultados alcanzados por los pitagóricos fueran si no descartados por sus conflictos con el infinito u otros postulados, sí duramente criticados por Zenón y sus seguidores (Mercado, 1972), quienes eran miembros de la escuela eleática.[1] Un ejemplo de esto fue el terrible descubrimiento de los números irracionales (conjunto $\mathbb{I}$), con lo cual se tuvo que abandonar la teoría pitagórica de la proporción basada en números para tratar de crear una nueva teoría no-numérica. Dado que entonces los griegos solo empleaban números enteros —elementos del conjunto $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$—, descubrieron que no existía un número capaz de medir a la vez el lado y la diagonal de un cuadrado unitario (Burton, 2011), es decir, encontraron que una de las dos cantidades era *inconmensurable* (figura 2).

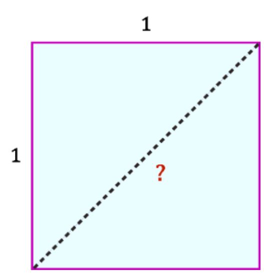

Figura 2. El descubrimiento de los números irracionales generó un caos de tal magnitud en la escuela pitagórica que trataron de sepultar por completo su hallazgo. Hoy en día, es muy fácil para nosotros saber que la diagonal de un cuadrado unitario vale $\sqrt{2}$, usando por cierto, el teorema de Pitágoras.

[1] La filosofía eleática se oponía a la filosofía materialista de la escuela jónica, fundada por Tales de Mileto en el siglo anterior (Mercado, 1972). Según los eleáticos, el universo era una unidad inmutable, que siendo infinita en tiempo y espacio, estaba más allá del discernimiento dado por los sentidos humanos. Únicamente a través de la reflexión filosófica, afirmaban, se podía alcanzar la verdad plena.

Los inconvenientes de trabajar con números irracionales y las paradojas de Zenón impidieron, de cierta manera, formular una temprana teoría sistemática del cálculo. Y aunque pareciera que Zenón solo obstaculizó el desarrollo de las matemáticas griegas, fueron sus razonamientos los que llevaron a sus contemporáneos a evolucionar su forma de pensar y a comenzar una fundamentación en ideas abstractas (Boyer, 1959). Con ello, sin lugar a duda, la matemática griega siguió abriéndose paso incluso contra el ente más conflictivo y difícil: *el infinito*.

La matemática griega siguió abriéndose paso incluso contra el ente más conflictivo y difícil: el infinito.

El infinito era visto por los griegos de dos formas opuestas: lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño, y no existía una regularización sobre él. Fue Aristóteles quien prohibió el uso deliberado del término, indicando que no era posible que el infinito existiera como sustancia, pero a su vez declaró que negarlo conducía a consecuencias imposibles. De esta manera, la regulación aristotélica del infinito no permitía considerar un segmento como una colección de puntos infinitos alineados —como hoy lo vemos—, pero sí permitía dividir este segmento por la mitad tantas veces como se deseara. Un contemporáneo de Aristóteles y discípulo de Platón, Eudoxo de Cnido, usó por primera vez de manera racional el infinito en las matemáticas, postulando que "toda magnitud finita puede ser agotada mediante la sustracción de una cantidad determinada", ayudando con este principio a superar la crisis debida al descubrimiento de los irracionales. La teoría no-numérica de Eudoxo, conocida como el método de exhaución o agotamiento (Boyer, 1959), permitió calcular el área de círculos con la exactitud deseada mediante el uso de polígonos inscritos (figura 3). Extrapolando esta idea, calcularon de forma similar el área de una esfera y demás objetos. Así nació el primer indicio sólido del cálculo infinitesimal y predecesor del cálculo de límites.

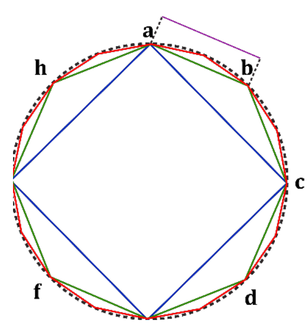

Figura 3. Representación del cálculo del área de un círculo usando el método de exhaución. A manera de ejemplo, se representan polígonos de 4 (azul), 8 (verde) y 16 (rojo) lados.

Con este método, Arquímedes encontró valores cercanos a π y se anticipó a muchos en los descubrimientos de la ciencia moderna con sus estudios sobre figuras planas y volúmenes en sólidos curvos. Por ejemplo, demostró que el volumen de una esfera es dos tercios del volumen del cilindro que la circunscribe y encontró el volumen de cualquier segmento de paraboloide o hiperboloide en revolución. Con esto podría decirse que Arquímedes calculó prematuramente algunas integrales.

Las aportaciones escritas de Arquímedes, que no se han perdido con el paso del tiempo, se conocen únicamente a través de referencias hechas por otros autores; algo que no le ocurrió al trabajo de Euclides de Alejandría, quien, sin duda, generó la máxima aportación escrita de la geometría griega con su obra *Elementos*, alrededor del 300 a. C. Este trabajo fue el resultado de la investigación de los geómetras de Atenas y Cícico; en 13 libros se recopilaron los conocimientos matemáticos que se habían generado en más de 2 000 años (Boyer, 1959; García, 2002; Mercado, 1972).

La intervención del álgebra

La historia del álgebra también se remonta a Mesopotamia y al antiguo Egipto, donde eran capaces de resolver problemas de índole socioeconómica —transacciones comerciales o repartos de herencias— usando ecuaciones lineales y hasta cuadráticas o cúbicas, mediante el desarrollo de fórmulas muy particulares y con poco simbolismo. Su método consistía en manipular progresiones aritméticas, resolviendo así problemas prácticos; por lo que nunca fueron capaces de reconocer al álgebra como una ciencia autónoma. Permaneció prácticamente en el mismo nivel durante varios milenios.

Sin embargo, con la expansión de la religión musulmana, los árabes comenzaron a incorporar ciencia de otros países, llegando a ser notables por sus trabajos. Tal fue el caso de Al-Jwārizmī, considerado como el padre del álgebra y conocido por su obra escrita por el año 825 d.C. Este matemático árabe fue el primero en utilizar la expresión al-ŷabr "álgebra" —que significa 'componer' (huesos)— con fines matemáticos, y fue capaz de dar solución a ecuaciones cuadráticas de forma sistemática a través de restitución y reducción —sin usar simbología—, obteniendo la primera solución completa de la ecuación de segundo grado (Dávila, 2002). La obra de Al-Jwārizmī tenía como objetivo enseñar álgebra aplicada para la resolución de problemas de la vida cotidiana.

Fue hasta el Renacimiento, a principios del siglo XVI, cuando se hizo un descubrimiento matemático de trascendencia en Occidente: la fórmula algebraica para la resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado.

El álgebra siguió su evolución a través de muchos siglos y numerosas personas; no obstante, como el resto de las ciencias, permaneció entumida durante el Medievo. Fue hasta el Renacimiento, a principios del siglo XVI, cuando se hizo un descubrimiento matemático de trascendencia en Occidente: la fórmula algebraica para la resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado , descubierta por Niccolò Fontana, mejor conocido como Tartaglia (Bourbaki, 1976). Este valioso hallazgo —publicado sin el permiso de Tartaglia por Gerolamo Cardano en 1545, debido a que el primero no tenía intenciones de divulgarla—, llevó a los matemáticos a interesarse por los números complejos y conjuntamente estimuló la búsqueda de soluciones similares para ecuaciones de quinto grado y superior (Burton, 2011; Rodríguez, 2002). Fue esta búsqueda la que a su vez generó, mucho después, los primeros trabajos sobre la teoría de grupos a finales del siglo XVIII y la teoría de ecuaciones del matemático francés Évariste Galois a principios del XIX. Asimismo, fue el impulso necesario para la realización del fructífero trabajo de Niels Abel, con el cual concluyó que era imposible resolver con un proceso elemental de álgebra general las ecuaciones de grado superior a cuatro; lo que no le fue reconocido sino hasta muchos años después de su muerte (Burton, 2011).

El nacimiento de la geometría analítica

Después del Renacimiento los europeos, y en particular los italianos, dominaron el desarrollo de las matemáticas debido, en gran parte, al empuje de una notación moderna. Luego de la introducción del signo de igualdad, el radical y otros, François Viète (Vieta, latinizado) tomó el paso decisivo de mejorar el simbolismo algebraico con la introducción de letras para representar incógnitas y parámetros conocidos, alrededor del año 1590 (Bourbaki, 1976; Burton, 2011; Collette, 2000). Así, una expresión matemática pasó de ser una colección de palabras a unas simples letras.

Antes de Vieta, escribir

$$7x^3 - 2x^2 = 5x + 8 \qquad (1)$$

era lo mismo que (Burton, 2011)

$$7AAA - 2AA\ aequatur\ 5A + 8. \qquad (2)$$

Y aunque la ecuación 2 pareciera complicada, no se hubiera comparado a escribir 1 en la inasequible notación de Diofanto:

$$K^{\gamma}7\ \Delta^{\gamma}2\ \iota\varsigma\ 5M8. \qquad (3)$$

Con una notación mejorada que se hacía cada vez más popular, en 1635, Bonaventura Cavalieri —alumno de Galileo—, publicó un tratado donde expuso un método mediante unos elementos que llamó los *indivisibles*. Y pese a que en su documento no definió el término 'indivisible', caracterizaba así a los elementos *infinitesimales* —decimos hoy en día— que utilizaba. La simple razón de no ofrecer una definición de ellos era porque no podía demostrar su existencia; aceptaba que eran correctos debido a los correctos resultados que obtenía. Para Cavalieri, una superficie estaba constituida por un número indefinido y muy grande —infinito, diríamos— de rectas paralelas equidistantes; y un sólido, por una infinidad de planos paralelos también equidistantes. Una aplicación del método de los indivisibles es una propiedad que se conoce como el *Principio de Cavalieri* (Bos, 1974; Zill & Wright, 2011), el cual consiste en la obtención del volumen de un cuerpo a partir de otro con volumen conocido (figura 4).

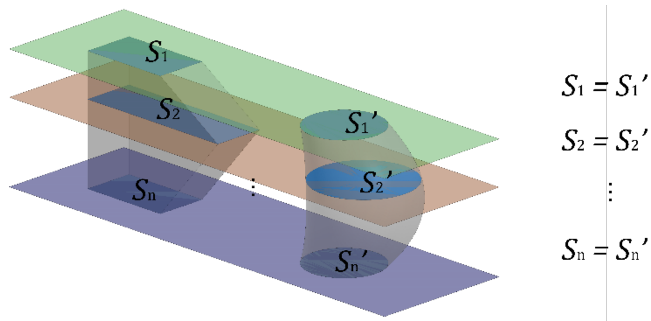

Figura 4. El principio de Cavalieri: "Si dos cuerpos al ser cortados por planos paralelos equidistantes producen siempre secciones de igual superficie S_n para toda n , entonces estos cuerpos tienen el mismo volumen".

En el siglo XVII otro importante suceso ocurrió, esta vez en geometría: la publicación de *Discours de la méthode (Discurso del método)*, de René Descartes,[2] en 1637, en el que dio a conocer la *geometría analítica* (Collette, 2000). En él exponía cómo emplear el álgebra desarrollada en el Renacimiento para resolver problemas de geometría de curvas, lo que Pierre de Fermat ya había descubierto, aunque no lo publicó: Fermat estableció fundamentos de geometría analítica en dos trabajos, que en varios aspectos eran más sistemáticos que el trabajo de Descartes. No obstante, los trabajos de Fermat fueron dados a conocer hasta 1679, tras su muerte; razón por la cual hoy en día hablamos de 'geometría cartesiana' y no de 'geometría fermatiana'.

Con el análisis cartesiano, varias de las ideas euclidianas que prevalecían en el pensamiento contemporáneo se modificaron. A diferencia del *método sintético* de Euclides, Descartes enfrentaba los problemas con un *método analítico*. Por ejemplo, si para Euclides α expresaba un segmento, su cuadrado era un área; no así para el francés, ya que puede construirse un segmento α^2 . Cabe mencionar que Descartes también inventó el método de los exponentes para indicar potencias.

Mediante esta evolución del pensamiento matemático se logró cruzar del análisis de *objetos geométricos* al análisis de *objetos algebraicos* (Collette, 2000). La idea central de la geometría analítica establecía una correspondencia entre una expresión de la forma $f(x, y)$ y un lugar geométrico. Así, Descartes era capaz de representar y dar solución a curvas y figuras geométricas a través de expresiones puramente algebraicas, es decir, sin la necesidad de emplear representaciones gráficas. Su procedimiento consistía en trasladar un problema geométrico al lenguaje de una ecuación algebraica; luego la simplificaba y finalmente resolvía esta ecuación.

Descartes era capaz de representar y dar solución a curvas y figuras geométricas a través de expresiones puramente algebraicas sin la necesidad de emplear representaciones gráficas.

[2] Léase 'decart'.

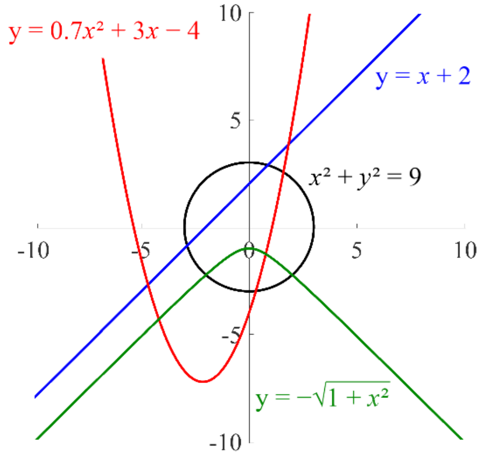

Figura 5. Ejemplos de funciones y ecuaciones representados en el plano cartesiano, acompañados de su expresión analítica.

A pesar de que Descartes es considerado el padre de esta rama matemática, es importante señalar que *nuestra* geometría analítica es la suma de la geometría cartesiana y fermatiana, pues mientras Descartes comenzaba con una curva y obtenía su expresión algebraica, Fermat empezaba con una expresión algebraica y obtenía de ella las propiedades geométricas de la curva correspondiente: ecuaciones a través del significado de las curvas y curvas definidas por ecuaciones (Collette, 2000) (figura 5). Otra aportación valiosa que le debemos a Fermat, y éste a Diofanto de Alejandría, fue el descubrimiento de un método para la búsqueda de máximos y mínimos de las líneas curvas: una anticipación al cálculo diferencial.

Leibniz y el surgimiento del cálculo

Las matemáticas, y en general la ciencia, continuaron floreciendo significativamente desde la época renacentista. Hubo otros muchos descubrimientos importantes entre los siglos XV y XVII. Sin embargo, el más importante en este último siglo fue, sin lugar a dudas, el surgimiento del cálculo elaborado por Gottfried Wilhelm Von Leibniz, en 1675.

Leibniz, desde que inició su travesía en este "nuevo análisis", notó que estaba trabajando con una nueva materia, una estructura rara y diferente. Por lo que el principal objetivo de Leibniz al crear esta novedosa estructura, con un muy extraño ingrediente —*el diferencial*—, era obtener un método más sólido y eficaz para resolver los problemas del ambiente matemático de la época: problemas sociales que los griegos, Descartes y otros habían asimilado como propios.

Existieron tres procesos en el desarrollo del concepto del *diferencial,* entre los siglos XVII y XVIII. El primero se dio con la introducción del *análisis leibniziano* en la geometría cartesiana. El segundo proceso, años más tarde, con la separación del análisis —*el cálculo*— respecto a la geometría, en el que se hizo posible la aparición del concepto de *función de una variable*, sustituyendo el de *cantidad geométrica variable* como concepto fundamental en el análisis matemático. En el tercer y último proceso se dio la sustitución del diferencial por la *derivada*, como concepto fundamental del cálculo infinitesimal, realizado muchos años después con los trabajos de Lagrange y Cauchy (Bos, 1974).

No obstante a que su extraordinaria aportación, el diferencial, era de naturaleza geométrica, Leibniz siempre trató de presentar sus reglas de operación como las reglas algebraicas clásicas. Dicho de otra manera, extrapoló estas reglas para manipular los objetos geométricos que recién introdujo. Y aunque la existencia de sus elementos fundamentales los basó en principios filosóficos, Leibniz no se preocupó tanto en aclarar la naturaleza de aquellos objetos raros, sino más bien sostuvo que *su* cálculo era solo un "modo de operar". La enorme diferencia entre un número —cantidad con un valor específico— y un diferencial, es que este último era una *cantidad no asignable de valor*: una cantidad infinitamente pequeña con respecto a un número.

Leibniz no se preocupó tanto en aclarar la naturaleza de aquellos objetos raros, sino más bien sostuvo que su cálculo era solo un "modo de operar".

Para entender un poco el cálculo leibniziano, que no podía ser comprendido sin la referencia de su interpretación geométrica, obtengamos de un rectángulo de área $A{=}xy$ (figura 6) su diferencial de área (dA). Por algebra simple, tenemos que

$$\begin{aligned} A + dA &= (x+dx)(y+dy) \\ &= xy + xdy + ydx + dxdy. \end{aligned} \tag{4}$$

Luego, sustrayendo A en la ecuación (4) se tiene

$$\begin{aligned} (A + dA) - A &= (xy + xdy + ydx + dxdy) - xy \\ &= xdy + ydx + dxdy. \end{aligned} \tag{5}$$

Por regla de operación de *su* cálculo, como $dxdy$ es infinitamente pequeño con respecto a dx, se eliminaba (no era despreciado). Por lo tanto:

$$dA = xdy + ydx. \tag{6}$$

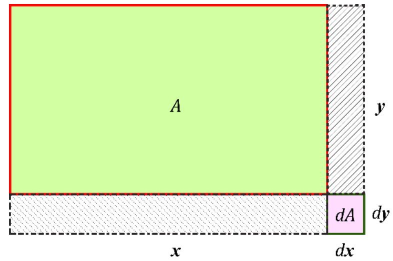

Figura 6. Representación geométrica para obtener un diferencial dA a partir de un área A, mediante el cálculo de Leibniz (ecuaciones (4)-(6)).

Aunque el resultado es correcto, podemos apreciar que la matemática empleada era algo rudimentaria.

Consideremos ahora otros ejemplos con el diferencial de Leibniz —lo haremos sin ayuda de la representación gráfica— analizando a la vez su semejanza con nuestras derivadas. Cabe mencionar nuevamente que en este punto las derivadas aún no existían. Considerando x y y segmentos (aunque podían ser áreas o volúmenes), el diferencial de la suma, el producto y la potencia respectivamente son (Bos, 1974):

$$\begin{aligned} d(x+y) &= [(x+dx)+(y+dy)]-(x+y) \\ &= dx+dy. \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} d(xy) &= [(x+dx)(y+dy)]-xy \\ &= xdy+ydx. \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} d(x^2) &= d(x\cdot x) \\ &= xdx+xdx \\ &= 2xdx. \end{aligned} \tag{9}$$

Aunque las ecuaciones (7)-(9) parezcan derivadas del cálculo actual, esta era la manera en la que Leibniz operaba sus *objetos geométricos*, su gran creación: *los diferenciales*.

En 1675, Leibniz logró calcular el área de una función —sumando las áreas de rectángulos "infinitamente delgados"— y, más tarde, expresó la relación inversa entre diferenciación e integración, conocida como el teorema fundamental del cálculo. Su obra publicada hasta 1684 estaba dirigida principalmente a matemáticos con un nivel de formación suficientemente alto.

Pese a que en 1666 el británico Isaac Newton desarrolló de forma independiente un trabajo semejante —el *Methodus fluxionum et serierum infinitorum* (Método de las fluxiones y series infinitas)—, y junto a Leibniz es considerado padre del Cálculo (diferencial e integral), el *cálculo de Leibniz* tuvo desde aquella época un mayor alcance, influencia y desarrollo que el *cálculo de Newton*. Esto se debió, entre otras cosas, a la notación matemática del alemán: agradable, fácilmente operable y que básicamente era "álgebra", a diferencia de la complicada notación de Newton que se estancó en Gran Bretaña (Burton, 2011). Cabe mencionar que la notación de Leibniz es la que actualmente empleamos: por ejemplo, una S alargada $\int$ para el símbolo de integral —que viene del latín *summa*—, y una letra 'd' minúscula d para el diferencial —del latín *differentia*—. Por su parte, Newton generalizó los métodos que se habían utilizado para trazar líneas tangentes a curvas y para calcular el área bajo una curva, empleando además "la derivada" como razón de flujo (fluxión) (Zill & Wright, 2011).

El nacimiento del análisis infinitesimal

Durante el resto del siglo XVII y buena parte del XVIII, los discípulos de Leibniz y Newton resolvieron diversos problemas de astronomía, física e ingeniería, lo que les permitió, al mismo tiempo, crear campos nuevos dentro de las matemáticas. La familia Bernoulli, por ejemplo —una de las más distinguidas familias en la historia de las matemáticas y física—, produjo un inusual número de científicos desde finales del siglo XVII, como los hermanos Jacob y Johann que, motivados por el trabajo de Leibniz, inventaron entre muchas otras cosas el *cálculo de variaciones*.

Por aquellas fechas cuando Johann Bernoulli impartía cátedra en la Universidad de Basilea, Suiza, tuvo bajo su enseñanza al que fue, sin duda, su mejor estudiante: Leonhard Euler, el matemático más prolífico de la historia, quien publicó en vida unos 530 libros y documentos, además de todos los manuscritos que no publicó.

A diferencia de Leibniz, que había publicado su trabajo para matemáticos expertos, Euler lo hizo para principiantes al percatarse de las carencias en los estudiantes. Estas insuficiencias se debían al deficiente dominio del álgebra ordinaria y del concepto de infinito; Euler afirmaba que estas dos cosas eran primordiales para poder entender las ideas del cálculo. En el primer libro de su obra *Introductio in Analysin Infinitorum* (Introducción al análisis del infinito) de 1748, habla de funciones en general y las clasifica en algebraicas y trascendentales; incorpora el concepto del logaritmo e introduce el número e —que por razones obvias decidió llamarlo así— (figura 7). El segundo volumen de su obra lo destinó al estudio de la geometría analítica, perfeccionando los métodos de Descartes.

En número $e \approx 2.718281828459$ (Euler, 1988) era expresado como

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^3}{n!} + \cdots = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad (10)$$

donde $x = 1$ y n era un número infinitamente grande (Tellechea, 2003). Hoy en día, definimos e como (Zill & Wright, 2011)

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \qquad (11)$$

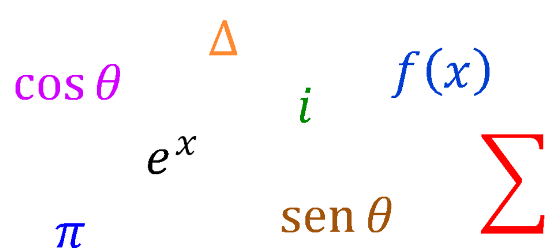

Figura 7. Euler también introdujo la notación moderna de varias funciones, números y símbolos, como las aquí representadas.

La *algebrización* del cálculo y el cálculo actual

Alrededor de 1766, cuando Euler renunció como director de matemáticas en la Universidad de Berlín y recomendó a Joseph-Louis Lagrange para ocupar su puesto, el filósofo George Berkeley atacaba duramente la defectuosa fundamentación del cálculo, frenando de momento el avance del pensamiento matemático contemporáneo. Sin embargo, análogo al caso de Zenón con los pitagóricos, esto logró estimular fuertemente la cimentación de esta rama matemática. Lagrange, siendo algebrista, también creía que el cálculo seguía sin tener una estructura sólida como la del álgebra, debido a que estaba sostenido por ideas filosóficas y metafísicas; por lo que trató de "algebrizarlo" (Burton, 2011; Fraser, 1987).

Lagrange, siendo algebrista, también creía que el cálculo seguía sin tener una estructura sólida como la del álgebra, debido a que estaba sostenido por ideas filosóficas y metafísicas; por lo que trató de "algebrizarlo".

No obstante, fue hasta 23 años después que el trabajo del matemático francés Arbogast influyó e impresionó a Lagrange con la aplicación de las definiciones de los conceptos del cálculo a la geometría. Fue tanto que Lagrange al definir el concepto de tangente de manera geométrica probó la equivalencia a la igualdad de las derivadas. Lagrange, con sus escritos exentos de metafísica —*Théorie des fonctions analytiques* (Teoría de las funciones analíticas) hacia 1797—, logró marcar una brecha significativa entre la geometría y el álgebra, pues aunque se consideraban dos ramas diferentes no podían decir donde terminaba una e iniciaba la otra (Burton, 2011). Así fue como el desarrollo conceptual del cálculo fue tomando más forma.

Más adelante, con ayuda de matemáticos tales como Augustin Louis Cauchy, Bernhard Riemann, Karl Weierstrass y Henri Lebesgue, el cálculo comenzó a ser planteado de una manera más rigurosa (Boyer, 1959): entre las aportaciones de Cauchy se encuentran los primeros trabajos en análisis infinitesimal, precisando los conceptos de función, límite y continuidad. Riemann, por su parte, es conocido por contribuir al análisis real y complejo. Weierstrass, el padre del análisis moderno, por las definiciones que actualmente usamos de continuidad, límite y derivada de una función, entre otras. Y Lebesgue, por sus aportes a la teoría de la medida y la generalización de la integral.

Desde aquí, el siglo XIX, y con la contribución de muchos matemáticos más, consideramos haber llegado al cálculo actual, uno bien fundamentado cuyas demostraciones formales son estudiadas hoy en día por el análisis real de variable real.

Conclusiones

El cálculo infinitesimal es una excepcional herramienta matemática con cabida en casi cualquier área del saber: física, biología, ingenierías, economía y ciencias sociales, entre otras. Sin embargo, más allá de ser una fría herramienta algorítmica, es el resultado del ingenio humano que ha evolucionado y se ha perfeccionado durante miles de años.

Aunque podríamos decir en palabras llanas que el cálculo es la "suma" de la aritmética, la geometría y el álgebra, en realidad es una rama diferente y autónoma. Los conceptos como el infinito y el infinitesimal hicieron de ella un nuevo campo en las matemáticas del que, a su vez, han surgido otros más como el análisis real y el análisis complejo.

En el presente trabajo no pudieron ser mencionados todos los personajes que forjaron los cimientos del cálculo actual. Sin embargo, es de esperarse que los mencionados sean suficientes para comprender el camino epistemológico que consolidó nuestro cálculo.

Referencias

Bos, H. J. M. (1974). *Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus*. Utrecht, Países Bajos: H. Freudenthal & J. R. Ravetz.

Bourbaki, N. (1976). *Elementos de historia de las matemáticas* (Trad. J. Hernández) (2.a ed.). Madrid, España: Alianza.

Boyer, C. B. (1959). *The history of the Calculus and its conceptual development*. New York, NY: Dover Publications.

Burton, D. M. (2011). *The history of mathematics: an introduction* (7.a ed.). New York, NY: McGraw-Hill.

Collette, J. P. (2000). *Historia de las matemáticas II* (4.a ed). Madrid, España: Siglo XXI Editores.

Dávila, G. (2002). El desarrollo del álgebra moderna. *Apuntes de historia de las matemáticas*, *1*(3), 5-21.

Euler, L. (1988). *Introduction to analysis of the infinite* (Trad. J. D. Blandon) (Vol. 1). New York, NY: Springer-Verlag.

Eves, H. W. (1994). *Tópicos de história da matemática: Geometria* (Trad. H. H. Domingues) (5.a ed.). Sao Paulo, Brasil: Atual Editora.

Fraser, C. G. (1987). Joseph Louis Lagrange's algebraic vision of the calculus. *Historia Mathematica*, *14*(1), 38-53.

García, M. G. (2002). El siglo de la geometría. *Apuntes de historia de las matemáticas*, *1*(2), 5-15.

Mercado, C. (1972). *Historia de las matemáticas*. Santiago de Chile, Chile: Editorial Universitaria.

Rodríguez, O. M. (2002). Las matemáticas en el renacimiento. *Apuntes de historia de las matemáticas*, *1*(3), 22-31.

Tellechea, E. (2003). El cálculo según Euler. *Apuntes de historia de las matemáticas*, *2*(1), 19-26.

Villalba, M. C. (2002). El nacimiento del cálculo. *Apuntes de historia de las matemáticas*, *1*(1), 46-53.

Zill, D. G. & Wright, W. S. (2011). *Cálculo: trascendentes tempranas* (4.a ed). China: McGraw-Hill.

Artículo recibido: 10-04-18
Aceptado: 10-05-18