

LEY DE TITIUS-BODE: EL ORDEN MATEMÁTICO DE LOS PLANETAS

TITIUS-BODE LAW: THE MATHEMATICAL ORDER OF PLANETS

Mtra. Belém Estefanía Mancilla Escobar*

Resumen

La astronomía como una de las ciencias más antiguas que ha dado la humanidad, es un claro ejemplo de cómo las matemáticas establecieron su carácter científico apartándola de la astrología. Presentamos un breve resumen del desarrollo de la astronomía gracias a las matemáticas y cómo pueden llevar al descubrimiento de nuevas teorías predichas de manera empírica; ponemos como ejemplo la ley de Titius-Bode. Encontramos que el conocimiento alcanza el carácter de ciencia gracias a las matemáticas, pero éstas a su vez requieren de un fundamento teórico que las respalde.

Abstract

One of the most ancient sciences developed by mankind is astronomy and it represents a clear example of how mathematics turned it on as a science leaving behind the concepts of astrology. We present a brief summary of the development of astronomy through history thanks to mathematics, and how they can get science to the achievement of new theories predicted empirically. An example of this is Titius-Bode law. We find that knowledge achieves the character of science thanks to mathematics, nevertheless, they require theoretical basis that supports them.

*Académica responsable del área de Física en la Universidad Iberoamericana León. Maestra en Ciencias (Astrofísica) por la Universidad de Guanajuato.
belem.mancilla@iberoleon.mx

Palabras clave: arqueoastronomía, modelo geocéntrico, modelo heliocéntrico, Titius-Bode.

Keywords: archaeoastronomy, geocentric model, heliocentric model, Titius-Bode.

Breve historia de la astronomía

A lo largo del tiempo, los astrónomos han observado y estudiado el Universo con el fin de llegar a conocer sus orígenes y hacia dónde y cómo evolucionará. La astrobiología, una nueva rama de la astronomía, incluso busca encontrar cómo se origina la vida en el Universo y, por ende, aquí en la Tierra.

La astronomía es la ciencia más antigua de todas debido a la siempre existente atracción y admiración que ejercen el Sol, la Luna y las estrellas sobre la mente humana (Masini, 1980). Los primeros observatorios astronómicos pertenecientes a las antiguas civilizaciones (babilonios, chinos, egipcios, fenicios y griegos) datan desde los años 3000 a. C. al 500 a. C. (Masini, 1980). Aquí en México, el observatorio del Caracol en Chichén Itzá fue construido en el año 525 d. C. por la cultura Maya (Aveni, 2005).

El primer registro sobre un eclipse solar se hizo en China en el año 2697 a. C. Los antiguos observadores del firmamento medían el tiempo a través de las posiciones del Sol, la Luna, los planetas y las estrellas (Masini, 1980). Aunque en ese entonces no sabían que se trataba de planetas como los reconocemos ahora, ya identificaban la diferencia en sus movimientos respecto a las estrellas, sus posiciones no eran fijas (de ahí el origen de su nombre que significa 'vagabundo' o 'errante'). Es en esta época, alrededor de mil años a. C. cuando los primeros observadores dividen el cielo en constelaciones, diferentes para cada cultura, y crean calendarios para determinar la duración de las temporadas de cosecha y las estaciones de lluvia y sequía (Aveni, 2005).

Por su parte, la medición del tiempo por los mayas muestra un estrecho vínculo con la repetición cíclica de sucesos celestes y su elaborado calendario se deriva de observaciones meticulosas del cielo (Aveni, 2005). Para diseñar sus calendarios desarrollaron un sistema de numeración, surgido probablemente en el año 600 a. C. en la región de Monte Albán, Oaxaca.

En este sistema de numeración se podían representar números del orden de los cientos de millones usando únicamente combinaciones de tres símbolos: un punto equivalía a uno y una barra horizontal a cinco, en tanto que una diversidad de símbolos representaba el cero. El cero maya significaba completamiento y no vacío. En el aspecto temporal se le consideraba el momento de completar un ciclo.

Gracias a este sistema de numeración, en el Códice de Dresde se puede observar que los mayas fueron capaces de predecir eclipses y posiciones solares, lo mismo que lunares y del planeta Venus. El Códice Dresde es un libro de imágenes mayas elaborado en el siglo XII o XIII en el norte de Yucatán (Aveni, 2005).

Curiosamente, tanto para las civilizaciones de Oriente como para las prehispánicas, la bóveda celeste estaba formada por diferentes esferas o capas donde iban colocando al Sol, la Luna, los planetas y las estrellas con la Tierra en su centro (Masini, 1980; Aveni, 2005), es decir, un modelo geocéntrico del Universo.

Para los mayas, Venus era el patrón de la guerra y gobernaba los ritos pertenecientes a la actividad bélica, y los cometas eran símbolos de malos presagios.

Sin embargo, es importante mencionar que en estas épocas la astronomía y la astrología iban de la mano. Para los mayas, Venus era el patrón de la guerra y gobernaba los ritos pertenecientes a la actividad bélica, y los cometas eran símbolos de malos presagios (Aveni, 2005). Las constelaciones zodiacales y la posición del Sol y de la Luna respecto a ellas tenían un significado especial en la vida de las personas.

Fue hasta alrededor del año 500 a. C. cuando Pitágoras comenzó a dar un sentido más científico y matemático a la astronomía gracias a los primeros avances en geometría. La especulación de los pitagóricos tuvo el mérito de habituar a los filósofos a la idea de la esfericidad de la Tierra y de los planetas. Según la intuición mística, la esfera es la figura perfecta (Masini, 1980). Alrededor del año 300 a. C. surge la figura de Platón quien valoraba la consistencia de una ciencia según su grado de matematización. La astronomía era para los platónicos una ejemplificación importante de las matemáticas y no solo una aplicación. Fueron pitagóricos y platónicos quienes comenzaron a tratar de explicar los movimientos de los cuerpos celestes a través de esferas y círculos regulares (Masini, 1980).

Eudoxo (408 a. C. – 355 a. C.), quien era seguidor de Platón, trató de explicar los movimientos retrógrados de los planetas a través de esferas. Supuso que los polos de cada esfera que encerraba a un planeta estaban incluidos en otra mayor, concéntrica de la primera, a su vez en movimiento. Dado que una segunda esfera no explicaba eficientemente el movimiento observado, introdujo una tercera y cuarta esferas que incluían los polos de la segunda.

Por lo tanto, para explicar el movimiento de los planetas, el Sol, la Luna y las estrellas, se requería de un total de 27 esferas (Masini, 1980); sistema un tanto complicado. Para esta época surge la figura de Aristóteles, quien introduce en la atmósfera que circunda a la Tierra las esferas de los elementos naturales puros: tierra, agua, aire y fuego. Más allá de la esfera de fuego se encontraba el éter, sustancia misteriosa que componía a los cuerpos celestes, pero que Aristóteles no describe en su totalidad. Después del éter había siete esferas correspondientes a los siete planetas conocidos hasta el momento. Finalmente, estaba la octava esfera de las estrellas fijas (Masini, 1980).

Alrededor del año 150 a. C. surge la figura de Hiparco de Nicea, quien introdujo en Grecia la división del círculo en 360° y a su vez la división del grado en 60 minutos y del minuto en 60 segundos. De esta manera ideó y construyó los primeros instrumentos utilizados en astronomía para la medición de posiciones angulares en el cielo: la dioptra y el astrolabio (Masini, 1980). Además, realizó una clasificación de las estrellas según su brillo, la cual permanece hasta la actualidad. También se debe a él la inclusión de órbitas excéntricas, en lugar de circulares, y el concepto de los epiciclos que más tarde usaría Ptolomeo en su libro *Almagesto* para explicar los movimientos retrógrados de los planetas según la hipótesis geocéntrica (Masini, 1980).

Estas teorías perdurarían hasta el siglo XVI, cuando Nicolás Copérnico en su obra *De Revolutionibus orbium caelestium* presenta sus cálculos matemáticos para generar siete postulados sobre un nuevo sistema de movimientos celestes. Los tres primeros postulados establecen que todas las esferas celestes tienen un centro común, pero la Tierra no es el centro del universo sino solo el de la gravedad y de la esfera de la Luna.

En su tercer postulado establece que todas las esferas celestes giran alrededor del Sol y, por lo tanto, el Sol es el centro del universo. A pesar de que el sistema de Copérnico lograba explicar las alternancias del día y la noche, el cambio de las estaciones, las fases lunares y el movimiento

retrógrado de los planetas, conservaba el movimiento de éstos en órbitas circulares, lo que complicaba la explicación de los cambios de velocidad que se observaban a lo largo de su trayectoria en el cielo (Masini, 1980).

Fue hasta alrededor del año 1596 de nuestra era cuando el astrónomo Tycho Brahe y su ayudante Johannes Kepler realizaron, durante diez años, observaciones precisas sobre la posición de cada planeta hasta ese momento conocido (Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno) y la posición de 1 005 estrellas. Posiciones que pudieron ser medidas gracias al astrolabio inventado por Hiparco, así como al desarrollo de la trigonometría esférica por Ptolomeo.

Para 1609, esto permitió a Kepler establecer las tres leyes más importantes sobre el movimiento de los planetas. La primera ley establece que los planetas giran alrededor del Sol en órbitas elípticas, ocupando el Sol uno de los focos geométricos de la elipse. Automáticamente, esta ley deriva en la segunda que establece que la velocidad de los planetas no es uniforme, sino que éstos se mueven más rápido cuando están más cerca del Sol cubriendo áreas iguales en tiempos iguales. Este fenómeno después sería explicado por Newton con su ley de gravitación universal.

La tercera ley establece que el cubo del semieje mayor de la elipse de cada planeta y el cuadrado del tiempo de revolución de cada planeta alrededor del Sol, mantienen una relación constante para todos los planetas. Matemáticamente esta ley se expresa de la siguiente forma: $T^2=ka^3$, donde T simboliza el período de revolución alrededor del Sol, a el semieje mayor de la órbita y k es una constante que sería determinada después por Newton.

Las tres leyes de Kepler explicaron eficientemente todas las observaciones del movimiento de los planetas, incluyendo el movimiento retrógrado y los cambios de velocidad observados en sus trayectorias. Sus leyes quedaron comprobadas cuando en 1609, Galileo Galilei, quien fue de los primeros en dirigir el telescopio al cielo y publicar sus observaciones. Galileo descubrió que Venus también presenta fases como la Luna, lo cual solo puede ser explicado si Venus se encuentra en una órbita interior a la de la Tierra.

Además, descubrió que alrededor de Júpiter orbitaban otros cuatro objetos celestes, a los que actualmente se les llaman satélites galileanos, lo cual reforzaba la idea de que el Sol se encontraba en el centro del sistema. Solamente había una excepción que las leyes de Kepler no podían explicar: el movimiento de precesión de Mercurio. Esto fue explicado tres siglos después gracias a la teoría de la relatividad de Einstein (Maravall, 2010).

Hasta ahora hemos resumido brevemente los acontecimientos más importantes sobre el desarrollo de la astronomía a través de la historia, el cual no podría haberse logrado sin el apoyo de las matemáticas. La invención de la geometría y la trigonometría hicieron posible establecer las leyes de Kepler. Fue por conteo de estrellas que se logró estimar la cantidad de ellas en la galaxia. Y

A pesar de que el sistema de Copérnico lograba explicar las alternancias del día y la noche, el cambio de las estaciones, las fases lunares y el movimiento retrógrado de los planetas, conservaba el movimiento de éstos en órbitas circulares, lo que complicaba la explicación de los cambios de velocidad que se observaban a lo largo de su trayectoria en el cielo.

es gracias a las simulaciones y modelos matemáticos que se puede estudiar y determinar la evolución de las estrellas, principalmente del Sol, para poder estimar la cantidad de masa en las galaxias, cúmulos de galaxias y en general de todo el Universo (Maravall, 2010).

Sin embargo, el uso de las matemáticas debe hacerse con cuidado. Existen algunas leyes empíricas que matemáticamente explican algún fenómeno, pero carecen de sentido físico. Una de estas leyes es la de Titius-Bode, que abordaremos en la siguiente sección.

Ley de Titius-Bode

Hacia el año 1766, J. B. Titius descubrió una ley empírica sobre la posición de los planetas en el Sistema Solar. Esta ley fue publicada de manera independiente en 1772 por Johann Elert Bode, y fue conocida desde entonces como la ley de Titius-Bode (Aschwanden, 2017). Esta ley establece que el radio orbital de los planetas sigue una serie matemática progresiva expresada de la siguiente forma (Lynch, 2003):

$$r_n = 0.4 + 0.3 \times 2^n \quad n = -\infty, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \quad (1)$$

donde n representa el número del planeta. En este a Mercurio se le asigna $-\infty$; a Venus, el valor de 0, y así sucesivamente hasta Saturno que, en la época en que fue descubierta esta ley, era el planeta más lejano del cual se tenía conocimiento. Cabe mencionar que para que dicha ley funcione los radios orbitales están medidos en unidades astronómicas. Una unidad astronómica equivale a la distancia de la Tierra al Sol. En la tabla 1 se muestran los radios obtenidos con la ley de Titius-Bode y los radios reales (Lynch, 2003).

Tabla 1. Comparación entre los radios establecidos por la ley de Titius-Bode y los valores reales.

| n | Planeta | Radio según ley Titius-Bode | Radio real |
|-----------|----------|-----------------------------|------------|
| $-\infty$ | Mercurio | 0.4 | 0.39 |
| 0 | Venus | 0.7 | 0.72 |
| 1 | Tierra | 1.0 | 1.00 |
| 2 | Marte | 1.6 | 1.52 |
| 3 | (Ceres) | 2.8 | 2.77 |
| 4 | Júpiter | 5.2 | 5.20 |
| 5 | Saturno | 10.0 | 9.54 |
| 6 | Urano | 19.6 | 19.18 |
| 7 | Neptuno | 38.8 | 30.06 |
| 8 | Plutón | 77.2 | 39.44 |

Gracias a las simulaciones y modelos matemáticos se puede estudiar y determinar la evolución de las estrellas, principalmente del Sol, para poder estimar la cantidad de masa en las galaxias, cúmulos de galaxias y en general de todo el Universo.

Para 1772, el cinturón de asteroides (representado por el asteroide Ceres en la tabla 1), Urano, Neptuno y Plutón aún no eran descubiertos. Sin embargo, Herschel en 1781 descubrió Urano, y Piazzi, en 1801, descubrió Ceres gracias a la predicción de esta ley.

Sin embargo, se puede observar que la ley de Titius-Bode falla para las posiciones de Neptuno y Plutón. Algunos autores han tratado de explicar lo anterior debido a perturbaciones gravitacionales con el cercano cinturón de Kuiper (semillero de cometas en las afueras del Sistema Solar), así como por el movimiento del Sol alrededor de la galaxia (Llibre y Piñol, 1987).

Desde la publicación de esta ley hasta la fecha, diversos autores han tratado de encontrar una teoría física que la respalde, sin llegar a algo concluyente. Algunos empiezan por expresarla de la siguiente manera (Aschwanden, 2017) para evitar asignar el valor de $-\infty$ a Mercurio:

$$r_n = \begin{cases} 0.4 & n = 1 \\ 0.3 \times 2^{n-2} + 0.4 & n = 2, \dots, 10 \end{cases} \quad (2)$$

Otros autores (Nieto, 1970) han modificado la ley estableciendo como base 1.7275^n en lugar de 2^n . Con el descubrimiento en 1995 del primer planeta extrasolar (Mayor y Queloz, 1995) y con los hasta ahora más de 1500 planetas extrasolares descubiertos, Poveda y Lara (2008) han aplicado una ley de Titius-Bode generalizada al sistema 55 Cancri que contiene 5 planetas orbitando alrededor de la estrella, los cuales solamente se ajustan a esta ley si al quinto planeta se le asigna el número $n = 6$ lo que implicaría que entre los planetas cuarto y quinto hasta ahora descubiertos estaría otro planeta aún sin descubrir.

Huang y Bakos (2014) utilizaron los datos de planetas extrasolares descubiertos por la misión Kepler y realizaron una búsqueda de este tipo de planetas predichos por la ley de Titius-Bode. De 96 sistemas estudiados solo encontraron 5 planetas predichos por esta ley. Altaie *et al.* (2016) y Hayes y Tremaine (1997) establecen que la falta de planetas extrasolares que sigan la ley de Titius-Bode se puede deber a un límite de detección debido a las características del sistema; por ejemplo, que el sistema planetario aún esté en proceso de formación y aún no se establezcan las órbitas de cada planeta, o que éste gire en una órbita fuera de la línea de visión desde la Tierra, lo cual hace imposible su detección.

Graner y Drubulle (1994a, 1994b) y Li *et al.* (1995) han encontrado en simulaciones numéricas que los discos protoplanetarios, a partir de los cuales se forman los planetas, presentan perturbaciones de densidad que también siguen series numéricas progresivas similares a la ley de Titius-Bode. Estas perturbaciones de densidad están asociadas a la posición donde se formará el planeta.

Hayes y Tremaine (1997), Flores-Gutiérrez y García-Guerra (2011) y Georgiev (2015) han establecido que cada sistema solar o de satélites se ajusta de manera diferente a la ley de Titius-Bode debido a sus características, por lo que se necesita una ley particular para cada sistema que dependa de las características de la estrella en torno a la cual giran los planetas.

Una de las teorías que posiblemente pueda respaldar, más aún no explicar en su totalidad la ley de Titius-Bode, es la teoría sobre las resonancias planetarias. Este concepto se refiere a una relación armónica entre los períodos orbitales de los planetas (Aschwanden, 2017). Estas resonancias

planetarias se han descubierto entre los planetas del Sistema Solar y entre algunos satélites de Júpiter y de Saturno (Aschwanden, 2017).

Mancilla y Coziol (2009) han encontrado la existencia de una simetría entre la energía potencial gravitacional de los planetas del Sistema Solar y las resonancias planetarias (D/D_J) respecto a Júpiter. D es la distancia del planeta al Sol y D_J es la distancia de Júpiter al Sol. En la figura 1 se muestra la simetría entre Mercurio y el planeta enano Eri, Venus y Plutón, la Tierra y Neptuno, Marte y Urano, y el cinturón de asteroides (representado por Ceres) y Saturno. Se observa además una clara separación entre los planetas jovianos (tipo Júpiter), los planetas terrestres (tipo Tierra) y los planetas enanos (tipo Plutón y Ceres), además de una simetría con el radio de influencia gravitacional de Júpiter, establecido por el radio de Hill en la gráfica.

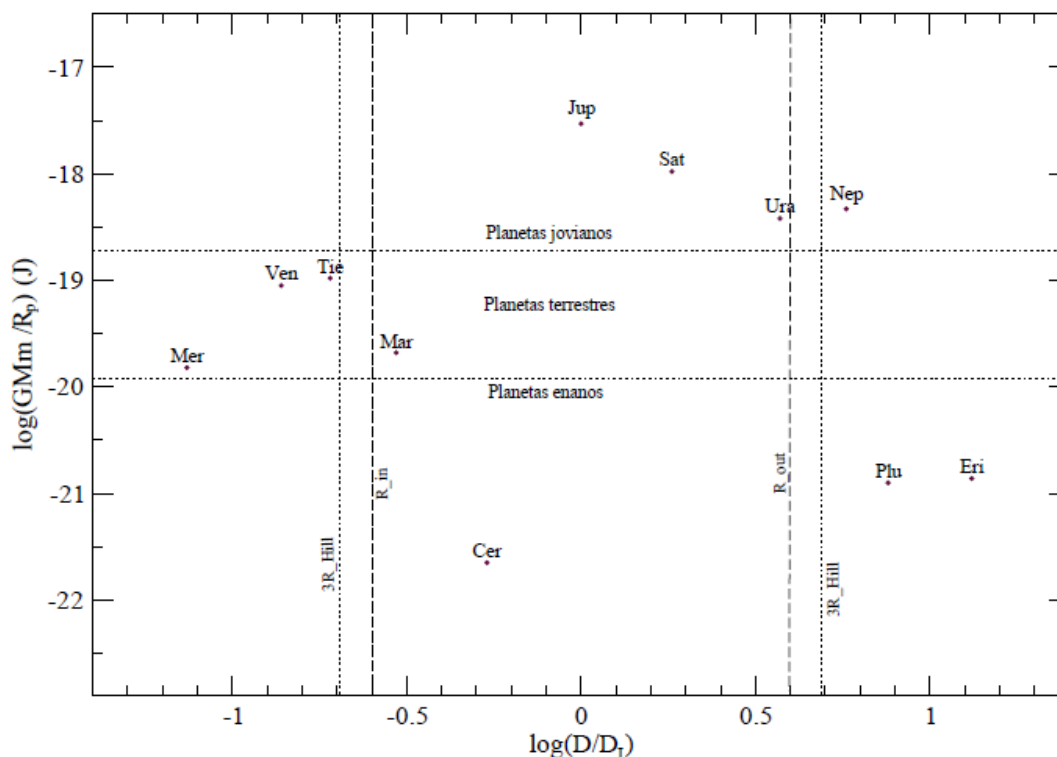


Figura 1. Gráfica del logaritmo de la energía potencial gravitacional de los planetas del Sistema Solar (incluidos algunos planetas enanos) contra el logaritmo del cociente de las distancias de los planetas (D) y la distancia de Júpiter al Sol (D_J).

Aunque no se ha encontrado una teoría física única y definitiva que respalde la ley de Titius-Bode, el hecho de que existan algunos sistemas de satélites y sistemas extrasolares que con ligeras modificaciones se ajustan a esta ley, y el que haya una relación con las resonancias planetarias, abre la posibilidad de que algún día sea posible dar una explicación que vaya más allá de una simple coincidencia matemática.

Conclusiones

Hemos expuesto de forma resumida cómo las matemáticas han contribuido a descubrimientos y un desarrollo significativo de la astronomía, dándole el carácter de ciencia y dejando atrás, como pseudociencia, a la astrología.

Gracias a las matemáticas, los astrónomos han podido estimar características del Universo que nos lleven a entender su origen y evolución. No podemos traer un pedazo de Sol y medirlo en el laboratorio, pero los modelos y simulaciones matemáticas nos acercan a lo que equivaldría experimentar físicamente con él.

En particular la ley de Titius-Bode nos recuerda de cierta forma aquellos modelos complicados de esferas para intentar explicar el modelo geocéntrico del Universo, y por experiencia histórica podemos estar seguros de que existe la posibilidad de que algún día esta ley empírica, o coincidencia matemática, pueda ser respaldada por una teoría física.

Porque finalmente, ¿qué sería de la ciencia sin las matemáticas?

Referencias

- Altaie, M. B., Yousef, Z., y Al-Sharif, A. I. (2016). Applying Titius-Bode's law on exoplanetary systems. Recuperado de <https://arxiv.org/abs/1602.02877>
- Aschwanden, M. (2017). Self-organizing systems in planetary physics: harmonic resonances of planet and moon orbits. Recuperado de <https://arxiv.org/abs/1701.08181>
- Aveni, A. F. (2005). *Observadores del cielo en el México antiguo*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Flores-Gutiérrez, J. D. y García-Guerra. C. (2011). A variant of the Titius-Bode Law. *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica*, 47, 173-184.
- Georgiev, T. (2016). Titius-Bode law in the Solar System. Dependence of the regularity parameter on the central body mass. *Bulgarian Astronomical Journal*, 25, 3-18.
- Graner, F. y Drubulle B. (1994a). Titius-Bode law in the Solar System. I. Scale invariance explains everything. *Astronomy and Astrophysics*, 282, 262-268.
- Graner, F. y Drubulle B. (1994b). Titius-Bode law in the Solar System. II. Build your own law from disk models. *Astronomy and Astrophysics*, 282, 269-276.
- Hayes, W. y Tremaine, S. (1997). Fitting random stable solar systems to Titius-Bode laws. Recuperado de <https://arxiv.org/abs/astro-ph/9710116>
- Huang, C. y Bakos, G. (2014). Testing the Titius-Bode law predictions for *Kepler* multiplanet systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 442, 674-681.
- Li, X. Q., Zhang, H. y Li, Q. B. (1995). Self-similar collapse in nebular disk and the Titius-Bode law. *Astronomy and Astrophysics*, 304, 617-621.
- Libre, J. y Piñol, C. (1987). A gravitational approach to the Titius-Bode law. *The Astronomical Journal*, 93, 1272-1279.

- Lynch, P. (2003). On the significance of the Titius-Bode law for the distribution of the planets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 341, 1174-1178.
- Mancilla Escobar, B. E. y Coziol, R. (2009). *La caracterización del ambiente solar como sitio propicio para la formación de vida y la búsqueda de planetas extrasolares similares a la Tierra*. (Tesis de Maestría). Universidad de Guanajuato.
- Maravall, D. (2010). Los métodos matemáticos de la astronomía y de la cosmología. *Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fis. Nat.*, 104, 1-26.
- Masini, G. (1980). *Historia ilustrada de la astronomía*. Italia: Círculo de Lectores.
- Mayor, M. y Queloz, D. (1995). A Jupiter-mass companion to a solar-type star. *Nature*, 378, p. 355.
- Nieto, M. (1970). Conclusions about the Titius-Bode law of planetary distances. *Astronomy and Astrophysics*, 8, 105-111.
- Poveda, A. y Lara, P. (2008). The exo-planetary system of 55 Cancri and the Titius-Bode law. *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica*, 44, 243-246.

Artículo recibido: 07-05-18
Aceptado: 16-10-18